Παράδειγμα 1:

Έστω τ.δ. $X_1, \dots X_n$ από κατανομή $P(\theta)$ όπου θ η τ.μ. της θ με εκ των προτέρων κατανομή Γάμμα$(p, 1/q)$.
Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και της $e^{-\theta}$ με συνάρτηση απώλειας το τετραγωνικό σφάλμα.

$$p(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\left(\frac{1}{q}\right)^p \Gamma(p)}, \theta > 0, \quad f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$$

Το π.ο της $f(x|\theta)$ είναι ανεξάρτητο του θ άρα μπορώ να χρησιμοποιώ την αναλογία $p(\theta|x) \alpha\, p(\theta) \cdot f(x,\theta)$ οπότε έχουμε

$$p(\theta|x) \,\alpha\, \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\left(\frac{1}{q}\right)^p \Gamma(p)} \cdot \frac{e^{-n\theta}\theta^{\Sigma x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \,\alpha\, \theta^{p-1} e^{-q\theta} e^{-n\theta} \theta^{\Sigma x_i} =$$

$$= \theta^{p+\Sigma x_i - 1} e^{-\theta(q+n)}, \theta > 0$$

Τότε $\theta | \underset{\sim}{x} \sim \text{Gamma}\left(p + \Sigma x_i, \frac{1}{q+n}\right)$

δηλ. $p(\theta|x) = \dfrac{\theta^{p+\Sigma x_i - 1} e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\Sigma x_i} \cdot \Gamma(p + \Sigma x_i)}$

Και είναι συζυγής ~~εκ των προτέρων~~.

Για τον εκτιμητή Bayes του θ έχουμε δύο τρόπους.

α' τρόπος

ορισμός αναμενόμενης τιμής, διότι εφόσον έχουμε ως συνάρτηση απώλειας το τετ. σφάλμα τότε εκ-Bayes = αναμ. τιμή $p(\theta|x)$

$$d_1^* = E_{\theta|\underset{\sim}{x}}(\theta) = \int_0^{\infty} \theta\, \pi(\theta|\underset{\sim}{x})\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{p+\Sigma x_i}\, e^{-\theta(a+n)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\Sigma x_i} \Gamma(p+\Sigma x_i)}\, d\theta \ldots$$ δεν αναλύεται λόγω χρόνου

β' τρόπος.

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της Γάμμα(a,β) είναι $a \cdot \beta$.

οπότε $d^* = \dfrac{p+\Sigma x_i}{q+n}$.

Για το $e^{-\theta}$

α' τρόπος $d_2^* = E_{\theta|x}(e^{-\theta}) = \int_0^{+\infty} e^{-\theta} p(\theta|x)\, d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{p+\Sigma x_i - 1}\, e^{-\theta(q+n+1)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\Sigma x_i} \Gamma(p+\Sigma x_i)}\, d\theta$

$$= \frac{\left(\frac{1}{q+n+1}\right)^{p+\Sigma x_i}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\Sigma x_i}} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{p+\Sigma x_i - 1}\, e^{-\theta(q+n+1)}}{\left(\frac{1}{q+n+1}\right)^{p+\Sigma x_i} \Gamma(p+\Sigma x_i)}\, d\theta$$

$$= \frac{(q+n)^{p+\Sigma x_i}}{(q+n+1)^{p+\Sigma x_i}}$$

β' τρόπος $E_{\theta|\underset{\sim}{x}}(e^{-\theta}) = E_{\theta|\underset{\sim}{x}}(e^{-\theta \cdot 1}) = m_{\theta|\underset{\sim}{x}}(t=-1)$.

όπου $\theta|\underset{\sim}{x} \sim Gamma\left(p+\Sigma x_i, \frac{1}{q+n}\right)$

Γνωρίζουμε ότι $m_x(t) = (1-\beta t)^{-a}$

Άρα $d_2^* = \left(1 - \frac{t}{q+n}\right)^{-(p+\Sigma x_i)}$ και για $t=-1$ τότε

$$d_2^* = \left(1 + \frac{1}{q+n}\right)^{-(p+\Sigma x_i)} = \left(\frac{q+n+1}{q+n}\right)^{-(p+\Sigma x_i)} = \left(\frac{q+n}{q+n+1}\right)^{p+\Sigma x_i}$$

Παράδειγμα 2:

Έστω τ.δ. $X_1 \dots X_n$ από κατανομή $U(0,\theta)$ όπου θ η τ.μ. της θ με εκ των προτέρων κατανομή $U(0,1)$. Να βρεθεί ο εκτιμητής της θ όταν $L(\theta,d) = (d-\theta)^2/\theta^2$

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta}, \; 0<x_i<\theta \;\; ; \; p(\theta) = 1, \; 0<\theta<1$$

Το π.ο της $f(x_i|\theta)$ είναι εξαρτημένο από το θ, επομένως δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω την αναλογία οπότε πάω με τον ορ. που έχουμε μάθει.

$$f(x_1 \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i), \; I_{(0,\theta)}(x_i) = 1, \dots \; 0$$

$$\int_0^1 f_x(x|\theta)p(\theta)\,d\theta = \int_0^1 \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) \, p(\theta)\,d\theta = \int_{x_{(n)}}^{1} \frac{1}{\theta^n}\,d\theta =$$

$$= \frac{1 - x_{(n)}^{1-n}}{1-n} = c \; , \; 0<x_i<\theta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0<x_1<\theta \\ 0<x_2<\theta \\ \vdots \\ 0<x_n<\theta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \max(x_i) < \theta \\ \Rightarrow x_{(n)} < \theta \end{array}$$

$$\text{Έτσι } p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\,p(\theta)}{\int_0^1 p(\theta) f(x|\theta)\,d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^n}\cdot 1}{c} \Rightarrow \frac{\theta^{-n}}{c}, \; x_{(n)}<\theta<1$$

Άρα έχουμε εκ των υστέρων αναμενόμενη απώλεια

$\int_{x_{(n)}}^{1} \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2} \cdot p(\theta|\underset{\sim}{x})\,d\theta$ παραγωγίζω ως προς d.

$$\int_{x_{(n)}}^{1} \frac{2(d-\theta)}{\theta^2} p(\theta|\underset{\sim}{x})\,d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_{(n)}}^{1} \frac{d\,p(\theta|\underset{\sim}{x})}{\theta^2}\,d\theta = \int_{x_{(n)}}^{1} \frac{1}{\theta} p(\theta|\underset{\sim}{x})\,d\theta$$

$$\Rightarrow d = \frac{\int_{x_{(n)}}^{1} p(\theta|x)\frac{1}{\theta}d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{1} p(\theta|x)\frac{1}{\theta^2}d\theta} = \frac{\frac{1}{c}\int_{x_{(n)}}^{1}\theta^{-n-1}d\theta}{\frac{1}{c}\int_{x_{(n)}}^{1}\theta^{-n-2}d\theta} =$$

$$= \frac{[\theta^{-n}]_{x_{(n)}}^{1}/(-n)}{[\theta^{-n-1}]_{x_{(n)}}^{1}/(-n-1)} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1-x_{(n)}^{-n}}{1-x_{(n)}^{-n-1}} = \frac{n+1}{n}\,\frac{x_{(n)}^{-n}-1}{x_{(n)}^{-n-1}-1}$$

Παρατηρούμε ότι αν είχαμε την ίδια εκφώνηση αλλά $p(\theta)=1, 2<\theta<3$
θα ίσχυε $p(\theta|x) = \frac{\theta^{-n}}{\int_{T}^{3}\theta^{-n}d\theta}$, $T \le \theta \le 3$, $\underbrace{\max\{x_{(n)}, 2\}}_{T} < \theta < 3$

Παράδειγμα 3

X_1, X_2, X_n τ.δ από $B(1,n)$ δηλ. $f(x_i|\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$
$x_i = 0,1$. με εκ των προτέρων Βήτα(a,b).
Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και της $(1-\theta)$(οπίτι)
και συνάρτηση απώλειας το τετραγωνικό σφάλμα.

$$p(\theta) = \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}, 0<\theta<1.$$

$$p(\theta|x) \propto \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\,\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}, \quad 0<\theta<1$$

ισχύει η αναλογία αφού το Π.Ο της $f(x_i|\theta)$ ανεξ. του θ.

$$p(\theta|x) \propto \theta^{a+\Sigma x_i-1}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i+b-1}, \quad 0<\theta<1$$

Άρα $\theta|\underset{\sim}{x} \sim \text{Betta}(a+\Sigma x_i, n-\Sigma x_i+b)$.

Άρα $d_1^* = \frac{a+\Sigma x_i}{a+n+b}$.

Υπολογίζουμε την συνάρτηση κινδύνου

$R(\theta, d^*) = E_{X|\theta}\{L(\theta, d^*)\} = E_{X|\theta}\{(d^*-\theta)^2\} =$

$= Var(d^*) + (Ed^*-\theta)^2 =$

$= Var\left(\frac{a+\sum X_i}{a+n+b}\right) + \left\{E\left(\frac{a+\sum X_i}{a+n+b}\right) - \theta\right\}^2 =$

$= \frac{n Var(X_i)}{(a+n+b)^2} + \left(\frac{a+nE(X_i)}{a+n+b} - \theta\right)^2 =$

$= \frac{n\theta(1-\theta)}{(a+n+b)^2} + \left(\frac{a+n\theta}{a+n+b} - \theta\right)^2 =$

$= \frac{n\theta - n\theta^2}{(a+n+b)^2} + \frac{a^2 - 2a(a+b)\theta + (a+b)^2\theta^2}{(a+n+b)^2}$

Αν θέλουμε ο εκτιμητής να είναι minimax θα πρέπει η $R(\theta, d^*)$ να είναι σταθερή ως προς θ.
Για να συμβεί αυτό θα πρέπει

$n = 2a(a+b)$ $\Rightarrow$ $a+b = \sqrt{n}$ $\Rightarrow n = 2a\sqrt{n}$

$n = (a+b)^2$ $\Rightarrow a = b = \frac{\sqrt{n}}{2}$

$n = 2a^2 + \cancel{2ab} = a^2 + \cancel{2ab} + b^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \boxed{a = b}$

Άρα $n = (2a)^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 2a \Rightarrow a = b = \frac{\sqrt{n}}{2}$

Άσκηση:

$X_1 \ldots X_n$ τ.δ. από $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$ εκ των προτέρων $p(\theta) = 1$, $0 < x < \theta$ να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes όταν συνάρτηση απώλειας είναι 1) $L(\theta, d) = (d-\theta)^2$, $L(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2}$